

FUNKCIE

Obsah:

premenná (veličina), "daná premenná je funkciou inej premennej", funkcia, reálna funkcia s jednou reálnou premennou, argument, funkčná hodnota, definičný obor a obor hodnôt funkcie, graf funkcie, rastúca, klesajúca, monotónna funkcia, maximum (minimum) funkcie, lokálne maximum a minimum funkcie, zhora (zdola) ohraničená funkcia, ohraničená funkcia, horné (dolné) ohraničenie; konštantná, prostá, inverzná, zložená, periodická funkcia, vlastnosti a vzťahy medzi monotónnosťou a prostou funkciou, medzi prostou a inverznou, graf inverznej funkcie, priesečníky so súradnicovými osami, priesečník grafov dvoch funkcií, grafy funkcií $a + f(x)$, $f(a + x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$,

- Dokážte, že funkcia $f: y = \frac{x}{1-x}$ je prostá a určte predpis inverznej funkcie f^{-1} .
- Sformulujte a dokážte tvrdenie o vzťahu medzi vlastnosťami funkcie – monotónna, prostá
- Vyslovte hypotézu o párnosti, nepárnosti daných funkcií a tvrdenia dokážte:

a) $f: y = 3x^2 + 1$ b) $g: y = \frac{x}{x^2 - 4}$ c) $h: y = \frac{5x}{x - 2}$

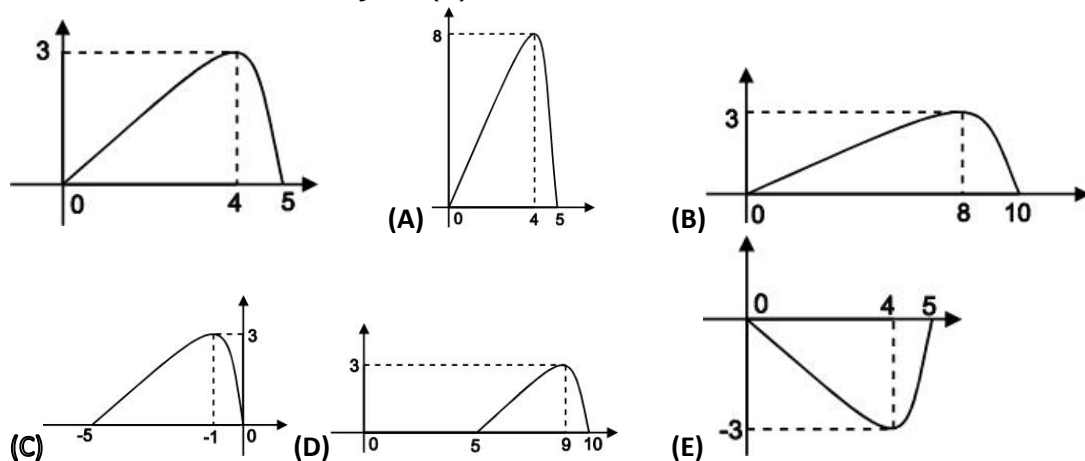
- Dokážte, že funkcia $y = ax + b$ je rastúca pre $a > 0$ a klesajúca pre $a < 0$. Znázornite príklady týchto funkcií.
- Dokážte, že funkcia $f: y = 2x^2 - 4x$ je rastúca pre $x \in (1; \infty)$. Graf funkcie zakreslite.
- Určte maximálnu hodnotu funkcie $y = -x^2 + 2x + 3$ a pomocou grafu určte počet riešení nerovnice $-x^2 + 2x + 3 \geq 4$.
- Dokážte, že funkcia $f: y = x^2 + 2x + 2$ je rastúca na intervale $(-1; \infty)$. Na základe grafu funkcie zdôvodnite, prečo rovnica $x^2 + 2x + 2 = 0$ nemá riešenie.

Príklady:

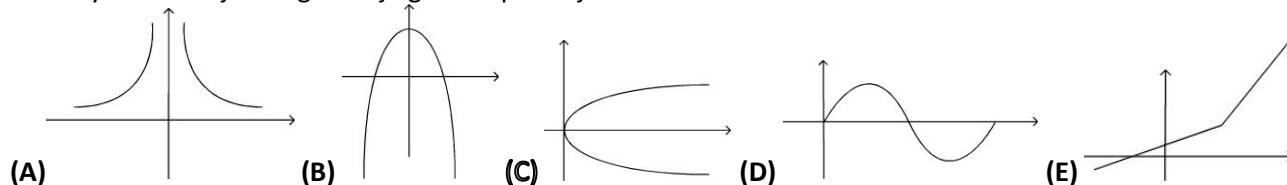
1. Nech D je definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x + 2}}$. Potom

a) $D = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ b) $D = (-2; \infty)$ c) $D = (0; \infty)$ d) $D = (2; \infty)$ e) $D = \mathbb{R} - \{2\}$.

2. Na obrázku je graf funkcie $y = f(x)$. Na ktorom z nasledujúcich obrázkov je graf funkcie $y = f(x + 5)$?



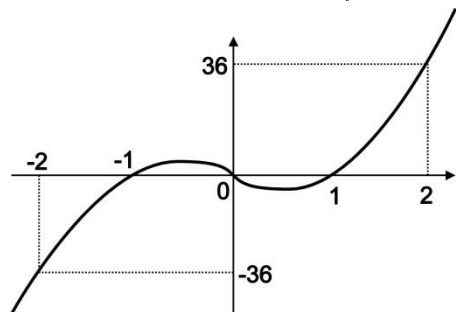
3. Ktorý z nasledujúcich grafov je grafom prostej funkcie?



4. Koľko čísel z 21-prvkovej množiny $\{-10; -9; -8; \dots; 7; 8; 9; 10\}$ patrí do definičného oboru funkcie $f: y = \sqrt{x + 4}$?

5. Funkcia $f : y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ je na intervale $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ klesajúca a na intervale $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$ rastúca. Nájďte najväčšiu hodnotu tejto funkcie na intervale $\left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

6. Na obrázku je graf funkcie g , ktorá pretína os x v bodoch $[-1; 0]$, $[0; 0]$ a $[1; 0]$. Ktorá z nasledujúcich množín je množinou všetkých riešení nerovnice $\sqrt{g(x)} \leq 6$?



- (A) $\langle -2; 2 \rangle$
 (B) $\langle 1; 2 \rangle$
 (C) $\langle -2; -1 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle$
 (D) $\langle -1; 0 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle$
 (E) $\langle -2; -1 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle$

7. Funkcia $y = x^6 + 7x^3 - 8$

- (A) má minimum rovné $-44,75$ (B) má minimum rovné $-20,25$ (C) má minimum rovné -8
(D) má minimum rovné $-\sqrt[3]{3,5}$ (E) nemá minimum

8. Ktorá z nasledujúcich množín je definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{\frac{x+4}{x-3}}$?

- (A) (B) (C) (D) $(-4; 3)$ (E)

9. Ktorá z nasledujúcich množín je definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{\frac{-6}{5x^2 + 2x - 3}}$?

- (A) (B) (C) (D) (E)

10. Definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{\frac{1-x}{x+7}}$ je interval $(a; b)$. Nájďte tento interval a do odpovedového hárku napíšte hodnotu $a + b$.

11. Funkcia f je lineárna a platí $f(0)=2$, $f(3)=-1$. Vypočítajte $f(10)$.

12. Posunutím grafu funkcie $f: y = 2(x - 2)^2 + 2$ v kladnom smere osi y o 3 sme dostali graf funkcie $g: y = ax^2 + bx + c$. Určte hodnotu c .

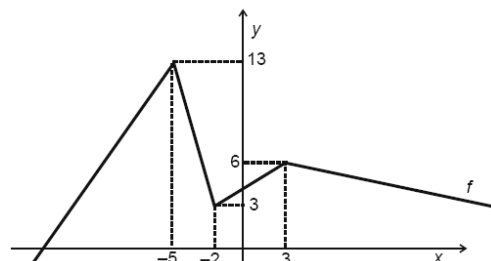
13. Graf funkcie $f : y = \frac{x+8}{x-4}$ pretína súradnicové osi v bodoch A a B. Určte vzdialenosť bodov A a B. Výsledok uveďte s presnosťou na dve desatinné miesta.

14. Graf funkcie $f : y = -\frac{4}{3}x + 8$ pretína súradnicové osi v bodoch A a B. Určte vzdialenosť stredu úsečky AB od začiatku súradnicovej sústavy.

15. Pre ktorú hodnotu $c \in \mathbb{R}$ je funkcia $f: y = 5x + c$ inverzná k funkcii $g: y = 0,2x - 10$?

- a) $c = -250$** **b) $c = -50$** **c) $c = -10$** **d) $c = 10$** **e) $c = 50$**

16. Na obrázku je graf funkcie f . Pre funkciu g platí $g(x) = 4 \cdot f(x)$. Určte maximálnu hodnotu funkcie g .



17. Inverznú funkciu k funkcii $f: y = 2 - \frac{1}{x+3}$ môžeme napísať v tvare $f^{-1}: y = a + \frac{b}{x-2}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Určte súčet $a + b$.

18. Pre ktorú hodnotu $c \in \mathbb{R}$ je funkcia $f: y = 5x + c$ inverzná k funkcii $g: y = 0,2x - 10$?

19. Lineárna funkcia f má smernicu $k = 0,4$ a jej graf pretína os y v bode $[0; -4]$. Nech g je inverzná funkcia k funkcii f . Zistite súradnice bodu $A[x_A; y_A]$, v ktorom graf funkcie g pretína os y .

20. Nájdite hodnotu $a \in \mathbb{R}$ tak, aby priamka s rovnicou $x = a$ bola osou súmernosti grafu kvadratickej funkcie $f: y = x^2 + 6x + 11$.

21. Určte obor hodnôt funkcie $f(x) = -2 \cdot (x+7)^2 + 5$, definovanej na intervale $\langle -12; 0 \rangle$.

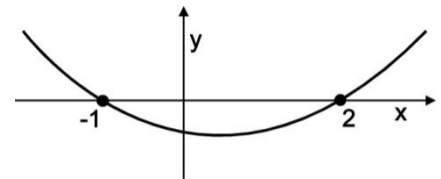
(A) $H(f) = \langle -93; -45 \rangle$ (B) $H(f) = \langle -93; 5 \rangle$ (C) $H(f) = (-93; -45)$ (D) $H(f) = (-93; 5)$ (E) $H(f) = \langle -45; 5 \rangle$

22. Aké súradnice má vrchol V paraboly $y = x^2 + 4x + 1$?

23. Pre vhodné čísla A, B sa funkcia $y = 4x^2 + 4x - 3$ rovná funkcii $y = A(x-1)(x+2) + B$. Určte hodnotu čísla B .

24. Na obrázku je časť grafu kvadratickej funkcie $y = x^2 + bx + c$.

Akú hodnotu má v predpise tejto funkcie koeficient b ?



25. Vieme, že inverzná funkcia f^{-1} k funkcii $f: y = x^2 + 4x - 5, x \in \langle -2; \infty \rangle$, má

predpis tvaru $f^{-1}: y = a + \sqrt{x+b}$. Nájdite tento predpis a do odpovedového hárka zapíšte hodnotu a .

26. Napíšte rovnicu kvadratickej funkcie, ktorej graf prechádza bodmi $A[1; 0]$, $B[2; 3]$, $C[0; 1]$.

27. Vyberte tvrdenia, ktoré nie sú pravdivé:

(A) Funkcia $f: y = x^2 - 2x + 1$ má maximum v bode $x = 1$.

(B) Funkcia $f: y = x^2 - 2x + 1$ je ohraničená zdola.

(C) Funkcia $f: y = x^2 - 2x + 1$ je párna.

(D) Funkcia $f: y = x^2 - 2x + 1$ je prostá.

(E) Funkcia $f: y = x^2 - 2x + 1$ je inverzná k funkcii $g: y = \sqrt{x^2 - 2x - 1}$.

28. Napíšte rovnicu kvadratickej funkcie, ktorej graf prechádza bodmi $A[0; 0]$, $B[1; 3]$, $C[-2; 0]$.

29. Ktorá z nasledujúcich funkcií má obor hodnôt $(0; \infty)$?

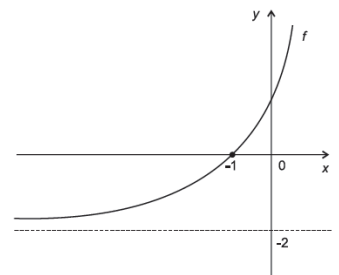
(A) $y = 10^{-x}$ (B) $y = -(10^x)$ (C) $y = -(10^{-x})$ (D) $y = \log x$ (E) $y = -\log x$

30. Zistite definičný obor funkcie $f: y = \log_2 \frac{3x-2}{1-x}$.

(A) $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ (B) $\left(\frac{2}{3}; \infty\right)$ (C) $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ (D) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; \infty)$ (E) $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$

31. Krivka na obrázku môže predstavovať časť grafu funkcie: (A) $y = 6^x + 1$

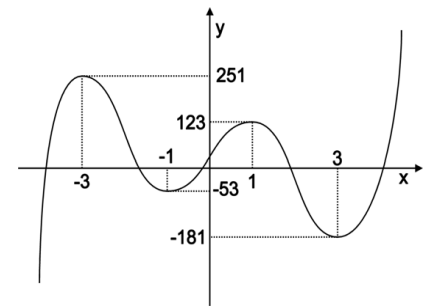
(B) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x + 1$ (C) $y = \log_{\frac{1}{6}} x + 1$ (D) $y = \log_6 x + 1$ (E) $y = \log_6(x+1)$.



32. Na obrázku je časť grafu funkcie $f: y = 2^{x+a} + b$, kde a, b sú neznáme reálne čísla. Akú hodnotu má súčin $a \cdot b$?

33. Daná je funkcia $f(x) = 2^{x+1}$. Určte, pre ktoré x sa funkčná hodnota funkcie f rovná 64.

34. Na obrázku je graf funkcie $f: y = 3x^5 - 50x^3 + 135x + 35$ s vyznačenými hodnotami všetkých jej lokálnych maxím a miním. Nájdite najväčšie $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré má rovnica $f(x) = a$ štyri rôzne reálne korene.



35. Nech $f(x) = 128 - 2x^3$. Pre čísla a, b platí $f(b) = 0$ a zároveň $f(a) = b$. Nájdite číslo a . Výsledok zapíšte s presnosťou na dve desatinné miesta.

36. Veličina H je nepriamo úmerná druhej mocnine veličiny P . Vieme, že ak P má hodnotu 2, tak H má hodnotu 9. Vypočítajte hodnotu H pre $P = 3$.

37. Určte počet priesečníkov (spoločných bodov) grafu funkcie $f: y = (x^2 - 1)(4x^2 + 4x + 1)$ so súradnicovou osou x .

38. Zistite definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{\frac{1-x}{x-2}} + 2$.

- a) $(2; 3)$ b) $(-\infty; 2) \cup (3; \infty)$ c) $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$ d) $\langle 3; \infty)$ e) $(-\infty; 2) \cup \langle 3; \infty)$

39. Grafom funkcie $f: y = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$ je

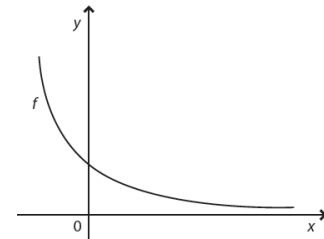
- a) parabola b) parabola bez jedného bodu c) hyperbola (graf lineárnej lomenej funkcie)
d) priamka e) priamka bez jedného bodu

40. Daná je funkcia $f: y = \sqrt{\frac{x-3}{4-x}}$. Určte číslo, v ktorom funkcia f nadobúda hodnotu 1.

41. Grafom kvadratickej funkcie $f: y = x^2 + 7x + 6$ je parabola s vrcholom $V[v_1; v_2]$. Vypočítajte súradnicu v_2 vrcholu paraboly.

42. Na obrázku je časť grafu funkcie $f: y = 0,5^x$. Rozhodnite o monotónnosti, ohraničenosti a extrémoch funkcie f .

- Funkcia f je na celom svojom definičnom obore
(A) klesajúca, zdola ohraničená a nemá extrém.
(B) klesajúca, zdola ohraničená a má minimum.
(C) klesajúca, ohraničená a má minimum.
(D) rastúca, zdola ohraničená a má minimum.
(E) rastúca, ohraničená a nemá extrém.



43. Určte súradnice bodov, v ktorých sa pretínajú grafy funkcií $f: y = x^2 + 2x - 14$ a $g: y = x - 2$. Nájdite najväčšiu zo súradníc priesečníkov grafov funkcií.

44. Dané sú funkcie $f_1 - f_6$:

$$f_1: y = -\frac{4}{3}x \quad f_2: y = x^2 - x + 2 \quad f_3: y = \frac{x}{x+1} \quad f_4: y = x^3 - 5 \quad f_5: y = \log_2 x \quad f_6: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Vyberte možnosť, v ktorej sú z daných funkcií f_1 až f_6 uvedené len všetky funkcie rastúce na celom svojom definičnom obore. (A) f_1, f_6 (B) f_2, f_4, f_5 (C) f_2, f_3, f_4 (D) f_3, f_4, f_5 (E) f_4, f_5